| الثانية س ب ع ت | التكـــــــــــامــــــل<br>ملخص الدرس | ح.بوعيون |
|---|---|---|

## I) تعـــــريـــــــف .

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $I$ وليكن $a$ و $b$ من $I$ .

نسمي تكامل $f$ من $a$ إلى $b$ العدد الذي نرمز له بـِ $\int_a^b f(x)dx$

والمعرف بما يلي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

حيث $F$ دالة أصلية للدالة $f$ .

**ملاحظة .**

*) نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

*) يمكن تعويض المتغير $x$ بأي متغير آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

## II) خـــاصيـــات

لتكن $f$ و $g$ دالتين متصلتين على مجال $I$ وليكن $a$ و $b$ و $c$ من $I$

**1)** $\int_a^a f(x)dx = 0$

**2)** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

**3)** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ( علاقة شال)

**4)** $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

**5)** $\int_a^b af(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$ حيث $a \in IR$ .

**6)** الدالة $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ هي الدالة الأصلية للدالة $f$ التي تنعدم في $a$ .

**7) a)** إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \;: f(x) \ge 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

**b)** إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \;: f(x) \le 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$

**c)** إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \;: f(x) \le g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

**d)** إذا كان $a \le b$ و فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

**8) a)** العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة لدالة $f$ بين $a$ و $b$

**b)** يوجد عدد $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

**c)** $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ حيث $m$ و $M$ هم القيمة الدنوية والقيمة القصوية للدالة $f$ على $[a,b]$ .

**ملاحظـــــــة** في الخاصية (8) ترتيب $a$ و $b$ غير مهم .

## III) تقنيات حساب التكـــــامـــــل .

**1) المكاملة بالأجزاء .**

لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال $I$ بحيث تكون $f'$ و $g'$ متصلتين على $I$ وليكن $a$ و $b$ من $I$ . لدينا :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

**2) المكاملة بتغيير المتغير .**

لتكن $\varphi$ دالة قابلة للإشتقاق على $[a,b]$ بحيث تكون $\varphi'$ متصلة .

ولتكن $f$ دالة متصلة على $\varphi([a,b])$ . لدينا :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

**ملاحظـــــة** عمليا نطبق صيغة تغيير المتغير كما يلي :

**a)** *) نضع $t = \varphi(x)$

*) لدينا $dt = \varphi'(x)dx$

*) $x = a \Rightarrow t = \varphi(a)$

$x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$

إذن $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

**b)** عندما نضع $t = \varphi(x)$ ، يستحسن حساب $x$ بدلالة $t$ إذا كان ذالك ممكنا ثم حساب $dx$ بدلالة $dt$ .

## IV) جدول الدوال الأصلية الإعتيادية

| دالة أصلية $F$ | الدالة $f$ |
|---|---|
| $1$ | $0$ |
| $ax$ | $a \ne 0$ |
| $\frac{1}{r+1}x^{r+1}$ | $x^r$ $(r \ne -1)$ |
| $\frac{1}{r+1}u^{r+1}$ | $u'u^r$ $(r \ne -1)$ |
| $-\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x^2}$ |
| $-\frac{1}{u}$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $2\sqrt{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| $2\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ |
| $\ln\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\ln\|u\|$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\frac{1}{a}e^{ax}$ | $e^{ax}$ |

| دالة أصلية $F$ | الدالة $f$ |
|---|---|
| $e^{u(x)}$ | $u'e^{u(x)}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\arctan(u(x))$ | $\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $-\cos x$ | $\sin x$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ | $\cos(ax+b)$ |
| $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ | $\sin(ax+b)$ |
| $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ | $1+\tan^2(ax+b = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ |
| $\sin u(x)$ | $u'(x)\cos(u(x))$ |
| $-\cos u(x)$ | $u'(x)\sin(u(x))$ |
| $\tan u(x)$ | $u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$ |

## V) بعـــض التقنيــــــــات

1) $I=\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على $ax+b$
ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$ .

2) $I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

a) إذا كان $\Delta<0$ نحدد الشكل القانوني $p(x)=ax^2+bx+c$
نحصل على $I=\int \frac{\alpha}{1+(u(x))^2}dx$ ونضع $t=u(x)$

b) إذا كان $\Delta>0$ نعمل $P(x)$ $p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ثم
نستنتج أن $\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta})$ ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$

c) إذا كان $\Delta=0$
$$I=\int\frac{1}{(x-\alpha)^2}dx=\int\frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

3) $I=\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على $ax^2+bx+c$ ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$ أو $\frac{u'}{1+(u)^2}$ .

4) $I=\int P(x)\sqrt[n]{ax+b}\,dx$ أو $I=\int\frac{P(x)}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$
نضع $t=\sqrt[n]{ax+b}$

5) $I=\int P(x)\cos(ax)dx$ أو $I=\int P(x)\sin(ax)dx$ أو
$I=\int P(x)e^{kx}dx$ ← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases} f(x)=P(x)\\ g'(x)=\cos(ax).....\end{cases}$$

6) $I=\int P(x)\cos\ln(x)dx$ أو $I=\int P(x)Arc\tan x\,dx$
← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases}f(x)=\ln x \ \ (ou\ \ \arctan)\\ g'(x)=P(x)\end{cases}$$

7) $I=\int e^{kx}\cos(ax)dx$ $\quad I=\int e^{kx}\sin(ax)dx$
← المكاملة بالأجزاء مرتين ونجد $I=A+\alpha I$

8) $I=\int\frac{1}{ae^x+b}dx$ .
$$I=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(ae^x+b)}dx=\int\frac{e^{-x}}{a+be^{-x}}dx=\int\frac{u'}{u}$$

9) $I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx$
$$I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx=\int(\ln x)'(\ln x)^r dx=\left[\frac{1}{r+1}(\ln x)^{r+1}\right]$$

10) $I=\int\frac{u(x)v(x)}{(w(x))^n}dx$
← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases}f'(x)=\frac{w'(x)}{(w(x))^n}\\ g(x)=....\end{cases}$$

## V) تطبيقـــات حســـــاب التـــكامـــــل

### 1) حســـــاب المســـاحات

a) لتكن $f$ دالة متصلة على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن $(E)$ الحيز المحصور بـ $C_f$ و $(x'Ox)$ و $x=a$ و $x=b$ .

مساحة الحيز $(E)$ هي $A(E)=(\int_a^b |f(x)|dx)\,u.a$

**ملاظـــــة :**

*) إذا كانت $f\geq 0$ يعني $C_f$ يوجد فوق محور الأفاصيل فإن $A(E)=(\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$

*) إذا كانت $f\leq 0$ يعني $C_f$ يوجد تحت محور الأفاصيل فإن $A(E)=(-\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$ .

*) إذا كانت تغير الإشارة مثلا فإن
$A(E)=\int_a^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^b f(x)\,dx$ .

b) لتكن $f$ و $g$ دالتين متصلتين على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن $(E)$ الحيز المحصور بـ $C_f$ و $C_g$ و $x=a$ و $x=b$ .

مساحة الحيز $(E)$ هي $A(E)=(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx)\,u.a$

**ملاحظـــــة :**

*) إذا كانت $f\geq g$ يعني $C_f$ يوجد فوق $C_g$
فإن $A(E)=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

*) إذا كانت $f\leq g$ يعني $C_f$ يوجد تحت $C_g$
فإن $A(E)=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

*) إذا كان وضع $C_f$ بالنسبة لـ $C_g$ يتغير فإن

$$A(E)=\int_a^\alpha (g(x)-f(x))dx+\int_\alpha^b (f(x)-g(x))dx$$

c) إذا كان $\|\vec{i}\|=\alpha cm$ و $\|\vec{j}\|=\beta cm$
فإن وحدة قياس المساحات هو $u.a=\alpha\beta cm^2$

### 2) حساب الحجـــــوم

a) ليكن $(S)$ مجسما ( أنظر الشكل )
وليكن $V$ حجم الجزئ المحصور بـ
$(S)$ و المستويين $z=a$ و $z=b$

إذا كانت الدالة
$$S:[a,b]\to IR$$
$$t\to S(t)$$
متصلة على $[a,b]$ فإن $V=(\int_a^b S(t)\,dt)\,u.v$

( $S(t)$ هي مساحة الجزئ تقاطع $(S)$ و المستوى $z=t$ )

b) لتكن $f$ دالة متصلة على $[a,b]$
إذا دار $C_f$ حول محور الأفاصيل دورة كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم دوران ،
وحجم هذا المجسم هو
$$V=(\int_a^b \pi(f(x)^2)dx\ )u.v$$